I. Fonction logarithme népérien

1) Définition :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$. elle admet donc des primitives sur cet intervalle

On appelle fonction logarithme népérien qu'on note $\ln$, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 .

Conséquences :

- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$; sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

  $\forall x \in]0;+\infty[\,; (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$

2) Première propriété de la fonction $\ln$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Conséquences

Pour tous réels strictement positifs a *et* b , on a : $\boxed{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \text{ et } \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b}$

Pour tout $x > 1$, on a $\ln x > 0$ et pour tout $0 < x < 1$,on a $\ln x < 0$

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(3-x) < 0$

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de définition de f et calculer sa dérivée

$f(x) = \ln(x+4)$; $f(x) = \ln x + 4$; $f(x) = \ln(x^2+4)$;

$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+4}\right)$; $f(x) = \ln|x+4|$

Propriétés :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors :

- $\forall x \in I \; : (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$
- Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ s'écrivent sous la forme :

  $x \mapsto \ln|u(x)| + c \; / \; c \in \mathbb{R}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Déterminer toutes les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

a. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$

b. En déduire toutes les primitives de f sur $]-1;1[$

c. Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie $F(0)=1$

Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f a des primitives, et donner une primitive de f

$f(x)=\frac{2}{2x-3}$; $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$; $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

3) Relations importantes

Propriétés

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$ $\quad \ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b$ $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

$\ln(a_1\times a_2\times\cdots\times a_n)=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n$

avec $a_1, a_2, \ldots$ et a_n sont des réels strictement positifs

$\ln(a^n)=n\ln a$, pour tout n de $\mathbb{Z}$

$\forall r\in\mathbb{Q};\ln(a^r)=r\ln a$. en cas particulier $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$

Exercice 6 :

Simplifier les expressions suivantes :

$\ln 2+\ln\frac{1}{2}$; $\ln 2+\ln 4-\ln 8$; $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+2\ln\sqrt{3}$; $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$

Etudier le signe de $f(x)$.

4) Etude de la fonction ln

- **Théorème admis:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

- $\forall x\in]1;+\infty[\ \ 0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$

Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$

- **Le nombre e :**

La fonction ln est continue, strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$

Donc l'équation $\ln x=1$ admet une seule solution dans $]0;+\infty[$ qu'on note e :

$e\approx 2,7182818285\ldots$

e est un nombre irrationnel et $\ln e=1$

Remarque:

Les valeurs approchées $\ln 2\approx 0,7$ et $\ln 3\approx 1,1$ sont à connaitre.

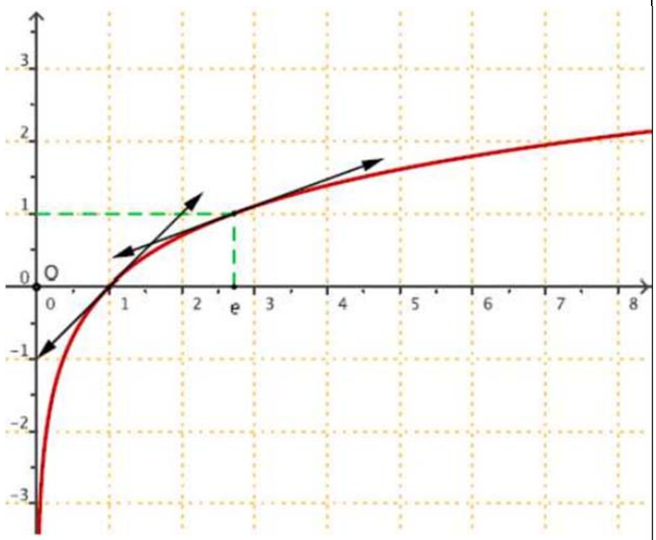
La tangente à la courbe de la fonction ln au point d'abscisse 1 est $(T):y=x-1$

La tangente au point d'abscisse e a pour équation : $y=\frac{1}{e}x$

- **Tableau de variation:**

x	0		1		e		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\parallel$			$+$			
$\ln(x)$	$\parallel -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- **Courbe représentative:**



Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$\ln x \leq 1$; $\ln x = 2$; $3 - \ln x \leq 8$; $\ln(2x+1) = 1$

$\ln(x^2) = -1$; $\ln(x(x+1)) = 0$; $\ln x + \ln(x+1) = 0$

5) **Propriétés**

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. En particulier , en 1 .

Donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (on pose $h = 1 + x$)

Exercice 9 :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{2} - \ln x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{3+2x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x\ln x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-\ln x}{x}$

Exercice 10 :

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3 \ln x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(x\ln\left(x^2 - x\right)\right)$

Théorème

Pour tout entier naturel non nul n , on a:

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$

Exemples :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x = 0$

II. Etude et représentation de fonctions composées

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. En déduire les asymptotes à sa courbe (Cf)

Dresser le tableau de variation de f

Tracer (Cf) ainsi que sa tangente au point d'abscisse e

Exercice 12 :

Dans tous les cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f :

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, b) $\begin{cases} f(x)=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2} & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$, c) $f(x)=\ln\left|x^2-3x+2\right|$

III. Fonction logarithme de base a

1. Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1

La fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $x\mapsto\dfrac{\ln x}{\ln a}$ s'appelle fonction logarithme de base a. Notée: $\log_a$

2. Remarque :

La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e .En fait :

$\forall x\in]0;+\infty[;\ \log_e(x)=\dfrac{\ln x}{\ln e}=\ln x$

$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\quad ;\quad \log_a(a)=1$

Et $\forall r\in\mathbb{Q}\quad ;\quad \log_a(a^r)=r$

3. Propriétés:

soit a un réel strictement positif et différent de 1

Pour tout x *et* y *de* $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout r *de* $\mathbb{Q}$, on a :

$\log_a xy=\log_a x+\log_a y\log_a$, $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$, $(x^r)=r\log_a(x)$

4. Etude de la fonction $\log_a$

Dérivée de la fonction $\log_a$

$\forall x\in]0;+\infty[\ :\ [\log_a(x)]'=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}$

Tableau de variation

Courbe représentative

5. Cas particulier : Fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme de base 10 , s'appelle fonction logarithme décimal notée log

Remarques

$\forall x\in]0,+\infty[\qquad \log x=\log_{10}(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln 10}\qquad \dfrac{1}{\ln 10}\simeq 0,434$

$\forall m\in\mathbb{Z}\qquad \log 10^m=m$

Exercice11:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Log(n-2)+Log(n+3)=2$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=65 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$